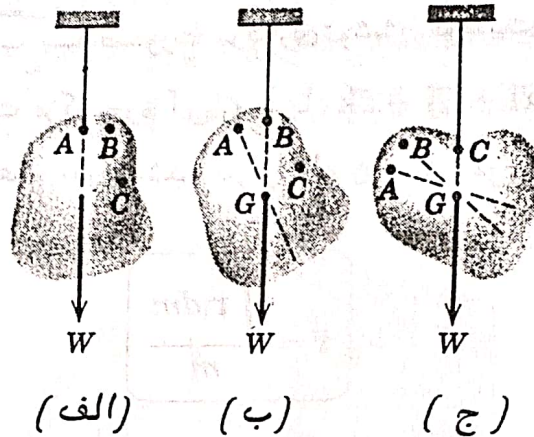


بخش الف. مرکز جرم و مرکز هندسی

۵-۲. مرکز جرم

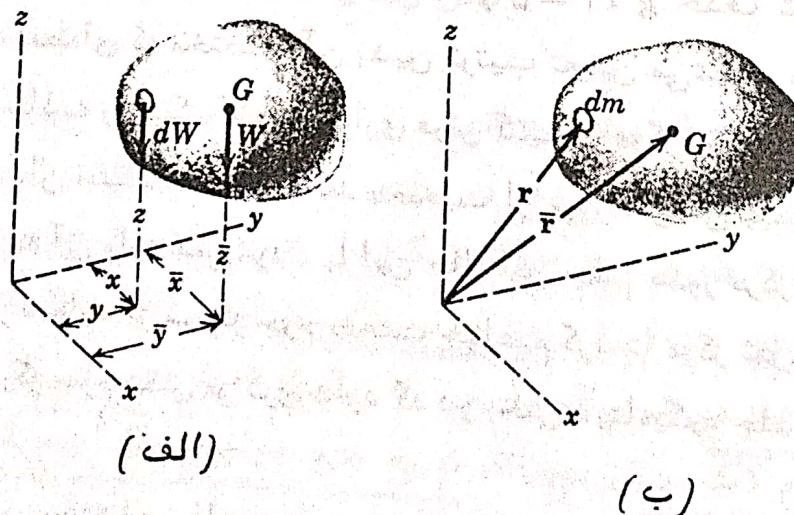
یک جسم سه بعدی را صرفنظر از اندازه و شکل آن، به جرم m در نظر می‌گیریم. این جسم را به هر نحو که مطابق شکل آویزان کنیم تحت اثر کشش کابل و نیروی وزن W در تعادل می‌ماند. بدیهی است نیروی وزن باید هم راستا با کشش کابل قرار گیرد. اگر این جسم از نقاط A ، B و C آویخته شود ملاحظه می‌کنیم که راستای نیروی وزن در این سه حالت، همدیگر را در نقطه G قطع می‌کنند. این نقطه مرکز ثقل نامیده می‌شود. یک آنالیز دقیق روشن می‌کند که راستای نیروی ثقل وارد شده به ذرات مختلف کمی با یکدیگر متفاوت می‌باشند، به این خاطر که همگی باید به سمت مرکز جاذبه زمین همگرا شوند. از طرف دیگر از آنجا که

ذرات جسم به فواصل مختلف از زمین قرار دارند ، نیروی یکسانی هم به آنها وارد نمی شود . از این صحبت می توان دریافت که برآیند نیروی وزن در حالت های مختلف جسم آویخته شده ، دقیقاً " از یک نقطه نمی گذرد . اما از نظر کاربردی اتخاذ فرض فوق نمی تواند خطای قابل ملاحظه ای را باعث شود . و یک راه عملی برای تعیین مرکز ثقل جسم انجام همین آزمایش می باشد .



شکل ۵-۳

برای تعیین مرکز ثقل جسم ، از روش ریاضی می توان از اصل گشتاورها کمک گرفت (بخش ۲-۶ را ببینید) . اگر نیروی جاذبه وارد شده به هر ذره از جسم را dW بنامیم و مجموع آنها $W = \int dW$ وزن جسم باشد . آنگاه برای مثال می توان گشتاور تمام جزء نیروها را حول محور y بدست آورد ، به عبارتی از dW باید انتگرال گرفت ، $\int x dW$. این مقدار باید با گشتاور نیروی وزن W در بازوی مرکز ثقل از محور y یعنی $W\bar{x}$ برابر باشد . اگر $W = mg$ و $dW = g dm$ را جایگزین کنیم ، برای هر سه محور دستگاه مختصات مورد نظر می توان نوشت



شکل ۵-۴

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{m} \quad \bar{y} = \frac{\int y dm}{m} \quad \bar{z} = \frac{\int z dm}{m}$$

* زمانی که می‌خواهیم گشتاور حول محور z بگیریم * این محور را بصورت افقی در نظر می‌گیریم. بدین ترتیب نیروی وزن حول این محور گشتاور خواهد داشت. رابطه ۱-۵، را می‌توان با استفاده از شکل ۴-۵ ب به صورت برداری نوشت. موقعیت جرم یک ذره از جسم را با $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ و موقعیت مرکز جرم آن G را با $\bar{\mathbf{r}} = \bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j} + \bar{z}\mathbf{k}$ نشان می‌دهیم. بدین ترتیب می‌توان گفت عبارت‌های معرفی شده در رابطه ۱-۵، مولفه‌های رابطه زیر می‌باشند.

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{m} \quad (2-5)$$

دانسته یک جسم ρ جرم واحد حجم آن می‌باشد. بدین ترتیب جرم یک المان به حجم dV از جسم بصورت $dm = \rho dV$ معرفی می‌شود. بدین ترتیب رابطه ۱-۵ را می‌توان بصورت زیر معرفی کرد.

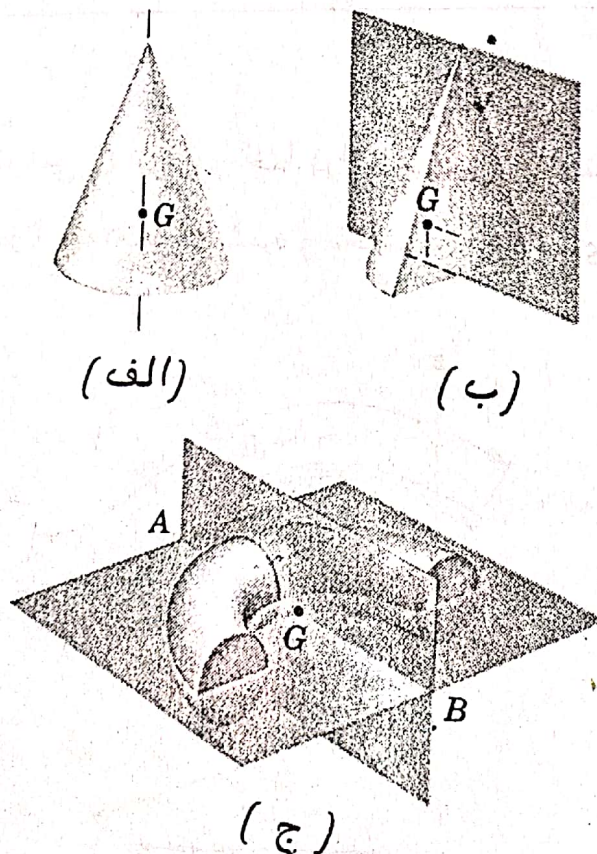
(۳-۵)

$$* \quad \bar{x} = \frac{\int x \rho dV}{\int \rho dV} \quad \bar{y} = \frac{\int y \rho dV}{\int \rho dV} \quad \bar{z} = \frac{\int z \rho dV}{\int \rho dV} \quad *$$

ملاحظه می‌کنیم که در رابطه ۱-۵، ۲-۵ و ۳-۵، g حذف شده است و اثری از تاثیر جاذبه نیست. نقطه‌ای که مختصات آن بدین ترتیب تعیین می‌شود، مرکز جرم می‌باشد. و چنانچه میدان جاذبه را یکنواخت و موازی فرض کنیم بر مرکز ثقل منطبق می‌گردد. اگر جسمی خارج از میدان جاذبه زمین باشد، صحبت از مرکز ثقل آن بی‌مورد است زیرا هیچ نیرویی از طرف زمین به آن وارد نمی‌شود. با این حال این جسم هنوز مرکز جرم خود را حفظ می‌کند. در بیشتر موارد از مرکز جرم صحبت خواهیم کرد تا مرکز ثقل. در بررسی رفتار دینامیکی جسم، مرکز جرم نقش مؤثری دارد که در بخش دینامیک، جلد دوم از این کتاب مطرح می‌شود.

* با فرض سیستم مختصات مناسب می‌توان محاسبات مربوط به تعیین مرکز جرم را تا حدی

ساده کرد. محورها باید به نحوی منظور گردند که معادلات مربوط به شرایط مرزی تا حد امکان ساده گردند. برای مثال در مورد اجسام دوار، استفاده از مختصات قطبی در بسیاری از موارد سبب سهولت می شود. مورد دیگر استفاده از تقارن در صورت وجود می باشد. بدیهی است مرکز جرم بر روی صفحه تقارن یا محور تقارن واقع می شود. برای مثال، مرکز جرم مخروط قائم نشان داده شد. در شکل ۵-۵ الف، بر روی محور تقارن آن قرار می گیرد. در مورد نیم مخروط نشان داده شده در شکل ۵-۵ ب، مرکز جرم بر روی صفحه تقارن واقع می شود. در مورد نیم حلقه نشان داده شده در شکل ۵-۵ ج، بدیهی است که مرکز جرم G بر روی خط AB ، فصل مشترک دو صفحه تقارن قرار خواهد گرفت.

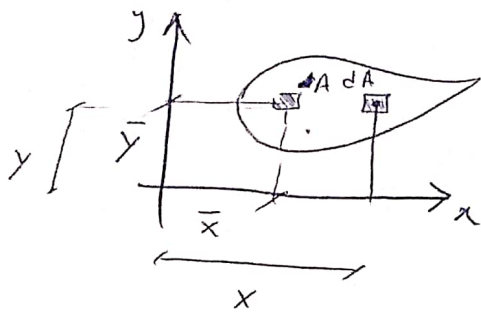


شکل ۵-۵

۵-۳. مرکز هندسی خط، سطح و حجم

زمانیکه دانسته یک جسم، M در تمامی جسم یکنواخت باشد، به صورت عاملی ثابت از صورت و مخرج رابطه ۵-۳، حذف می‌گردد. بدین ترتیب آنچه می‌ماند تنها با برگشت به مشخصات هندسی است زیرا مراجعه‌ای به جرم نمی‌شود. زمانیکه تنها هندسه جسم مطرح می‌باشد، با مرکز هندسی سروکار داریم. اما زمانیکه از یک جسم فیزیکی صحبت می‌کنیم، از اصطلاح مرکز جرم کمک می‌گیریم. اگر توزیع جرم در جسم یکنواخت باشد، مرکز هندسی بر مرکز جرم جسم منطبق می‌شود برای مطالعه مرکز هندسی، سه مورد خط، سطح و حجم را

ب) مساحت هندسی سطح:



! نرداول سطح یا مال استاتیك سطح

$$S_x = \int_A y dA$$

محور x (مال)
استاتیك

$$S_y = \int_A x dA$$

نرداول سطح (نرداول حول محور y)

در صورتی که کل سطح در یک نقطه جمع گردد، ارتفاعات نقطه بگویند مرکز سطحی که در نرداول سطح حول دو محور

و تغییر نکند ←

$$\left. \begin{aligned} A\bar{x} &= S_y \rightarrow \bar{x} = \frac{1}{A} \int_A x dA \\ A\bar{y} &= S_x \rightarrow \bar{y} = \frac{1}{A} \int_A y dA \end{aligned} \right\} \rightarrow c \left| \begin{array}{c} \bar{x} \\ \bar{y} \end{array} \right| \text{ مرکز سطح}$$

۱) دایره مان استاتیك (حول)

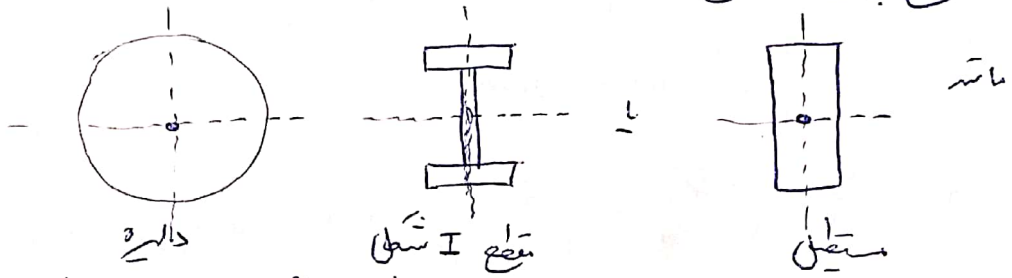
۲) همان استاتیك دایره متادیر مثبت، منفی و حتی منفرجه باشد (اگر مرکز سطح از مبدأ باشد)

۳) همان استاتیك سطح، نسبت به هر محور که از مرکز سطح بگذرد برابر است

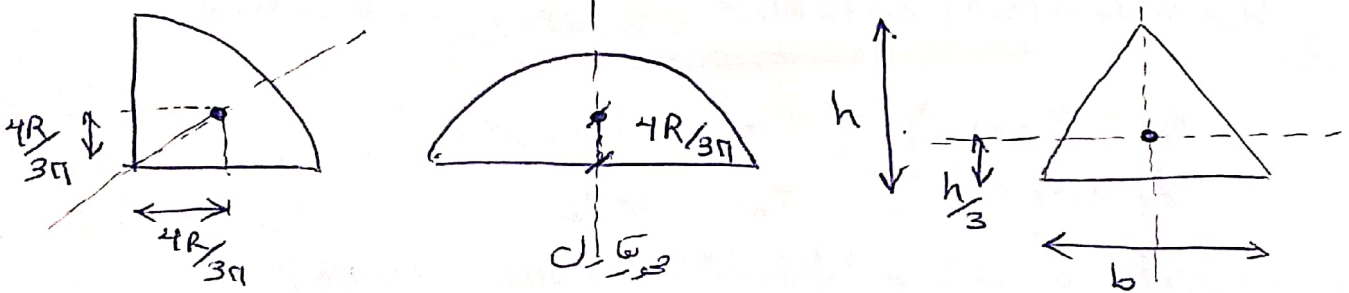
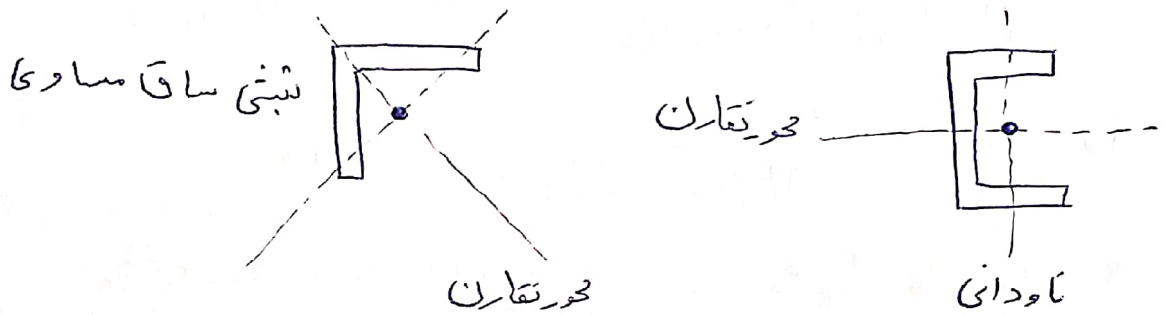
۴) اگر سطحی دایره یک محور تقارن باشد، مرکز سطح حتماً بر روی آن محور قرار می گیرد

مرکز ثقل:

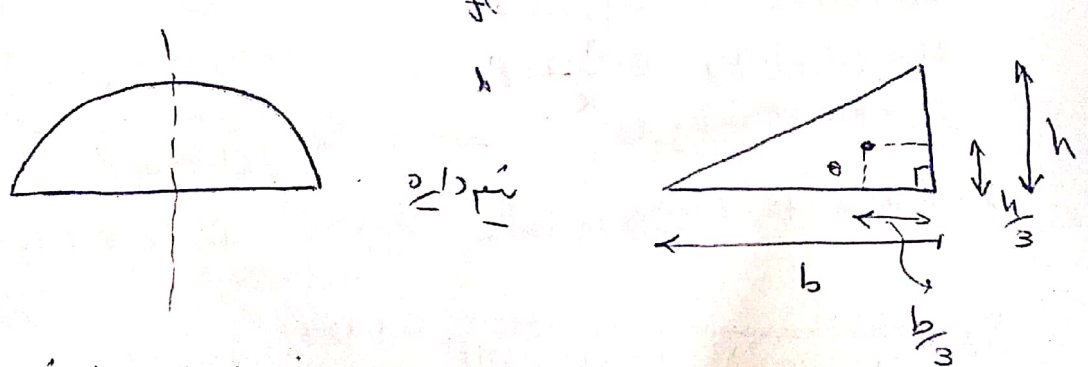
مرکز ثقل برای اشکال متعارف در وسط یا به بعد در محل برخورد محورهای متعارف است.



اگر شکل یک محور متعارف داشته باشد، مرکز ثقل تماماً بر روی آن خواهد بود.



مقاصی که محور متعارف ندارند باید از روش‌های استرال گیری استفاده نمود. در شکل زیر AS برای مساحت مثلث زیر



باید آن را به دو مثلث تبدیل کنید و از مرکز ثقل سطوح مرکب استفاده کنید.

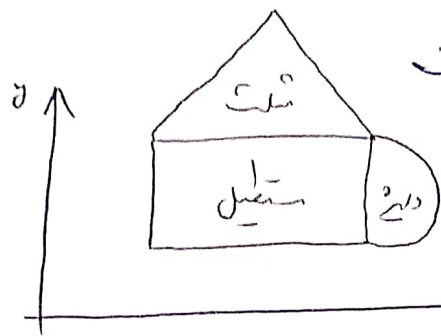
اگر مثلث زیر بود:

h

$\frac{h}{3}$

b_1

b_2

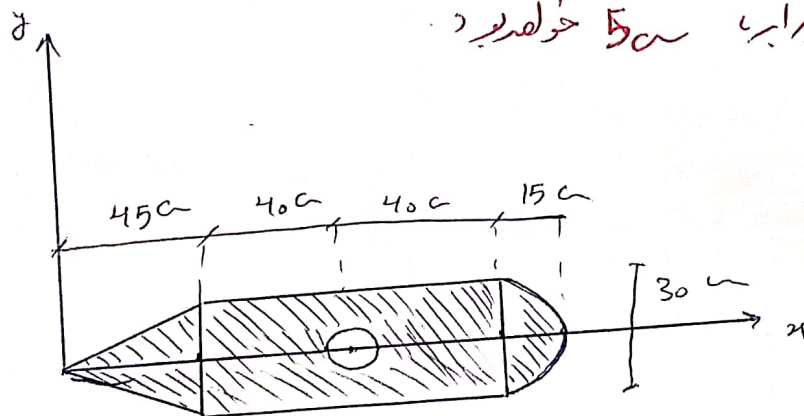


- مرکز سطح مقطع مرکب
- (۱) به این منظور ابتدا باید یک دستگاه مختصات اولیه در نظر گرفت
- (۲) توصیف مرکز هر شکل را نسبت به دستگاه اولیه باید کرد.
- (۳) از فرمول زیر استفاده نمود.
- (۴) در این فرمول اگر در شکل اصلی، قسمتی به صورت "توخالی" بود، مساحت آن را منفی بگذارید.

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \sum S_{x_i} = \sum A_i \bar{y}_i \\ S_y &= \sum S_{y_i} = \sum A_i \bar{x}_i \\ A &= \sum A_i \end{aligned} \right\} = \begin{cases} \bar{y} = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots}{A_1 + A_2 + \dots} \\ \bar{x} = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots}{A_1 + A_2 + \dots} \end{cases}$$

مثال: سطح پایی یک پل صورت شکلی زیر می باشد. مطلوب است تعیین مرکز سطح آن.

شعاع سیاه برابر ۵۰ سانتی متر خواهد بود



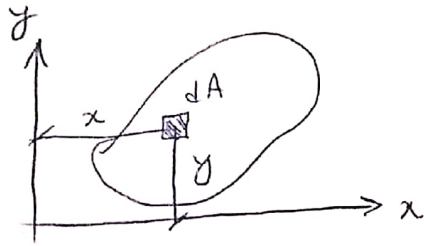
شعاع	مساحت (A_i)	$\bar{x}_i$	$A_i \bar{x}_i$
مثلث	$\frac{45 \times 30}{2} = 675$	$\frac{2}{3}(15) = 30$	20250
مستطیل	$80 \times 30 = 2400$	85	204000
نیم دایره	$\frac{\pi \times 900}{2 \times 4} = 353.4$	131.37 $(45 + 80 + \frac{4 \times 15}{3\pi})$	46426.158
دایره	$\frac{\pi \times 25}{4} = 78.5$	$40 + 48 = 88$	- 6672.5
	$\sum A = 3349.9$		264003.66

$$\bar{x} = \frac{S_x}{A} = 78.81 \text{ m}$$

(Area Moment of Inertia)

۲. همان انیرسی سطح:

خاصیت سطح که در مقابل دهنده سطح حول یک محور متناوب می کند.



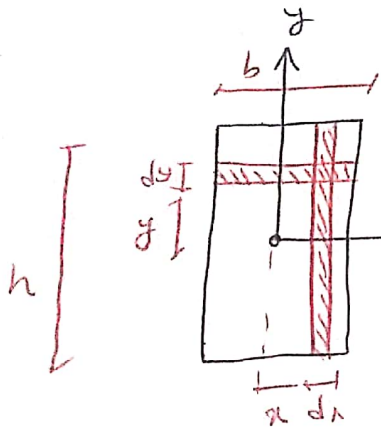
$$I_{xx} = \int y^2 dA$$

(مقدار سطح) همان انیرسی سطح A نسبت به محور x

$$I_{yy} = \int x^2 dA$$

(مقدار سطح) همان انیرسی سطح حول محور y

۲-۱ مثال:



$$dA = b dx$$

$$I_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} x^2 b dx = \left(\frac{b x^3}{3} \right) \Big|_{-h/2}^{h/2} \times 2$$

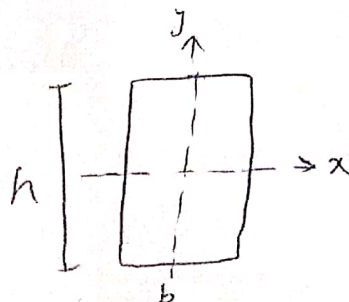
$$= \frac{2}{3} b \times \frac{h^3}{8} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{yy} = \int x^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 [h dx] = 2 \int_0^{b/2} x^3 h dx$$

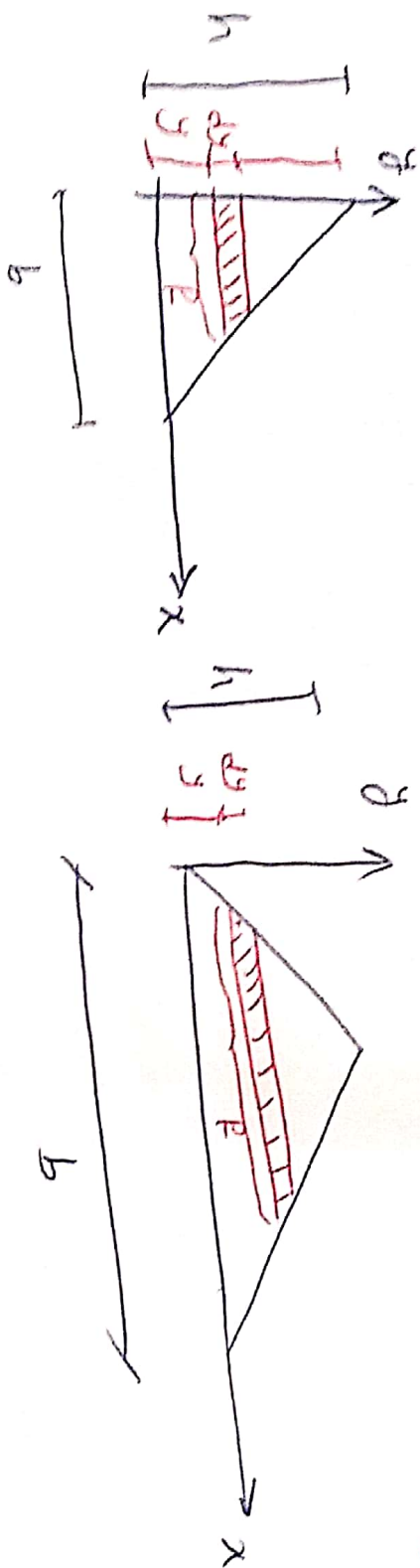
$$= \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{xx} = \frac{hb^3}{12}$$



۲-۲ مکان انیرسی حول یه



$$dA = b dy$$

$$\frac{b}{h} = \frac{h-y}{h} \rightarrow b = \frac{b}{h} (h-y)$$

$$I_{x-x} = \int_0^h y^2 \frac{b}{h} (h-y) dy = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{y-y} = \frac{bh^3}{12}$$

$$dA = b dy$$

$$b = \frac{b}{h} (h-y)$$

$$I_{x-x} = \int_0^h y^2 \times b dy = \frac{bh^3}{12}$$

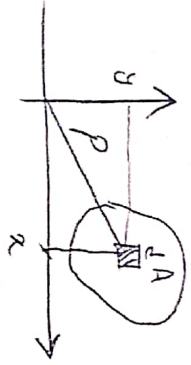
$$I_{x-x} = \frac{bh^3}{12}, \quad \frac{bh^3}{12}$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

۳-۳ مکان انیرسی دایره نسبت به قطر:

I مرکز انیرسی خطی :

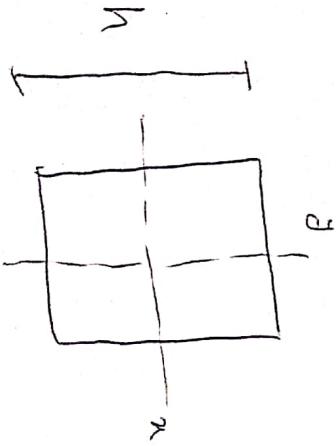
میر سادست سطح در برابر چرخش حول مبدأ (مركز)



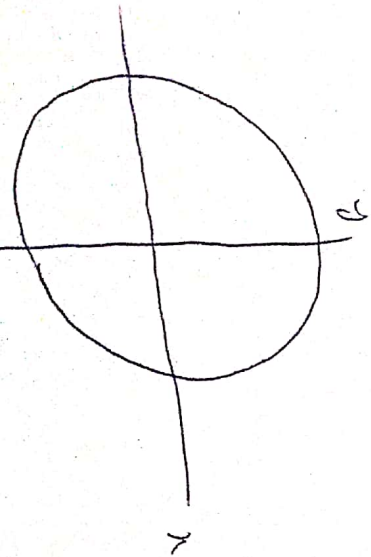
$$I = \int_A P^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA$$

$$= I_{y-y} + I_{x-x}$$

مثال : مکان انیرسی خطی دایره در سبیل :



$$I = I_x + I_y = \frac{b^3 h}{12} + \frac{h b^3}{12} = \frac{b h}{12} (h^2 + b^2)$$



$$I = I_x + I_y = \frac{\pi R^4}{4} + \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

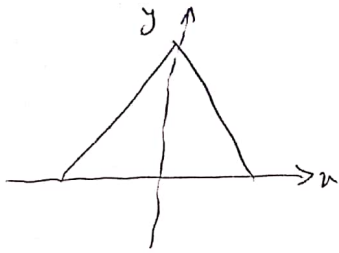
$$I = \int r^2 dA = \int r^2 \times r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr$$

$$= 2\pi \times \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$I_{xy} = \int xy dA$$

4. حاصلضرب اینرسی:

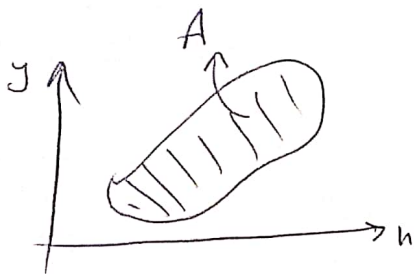
نکته: اگر سطحی دارای محور تقارن باشد، حاصلضرب اینرسی این سطح نسبت به دستگاه منتهی به صفر است.



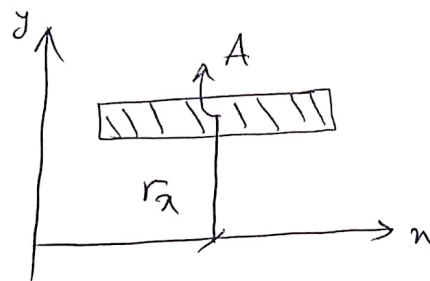
$$I_{xy} = 0$$

Radius of gyration

5. شعاع گیراسیون:



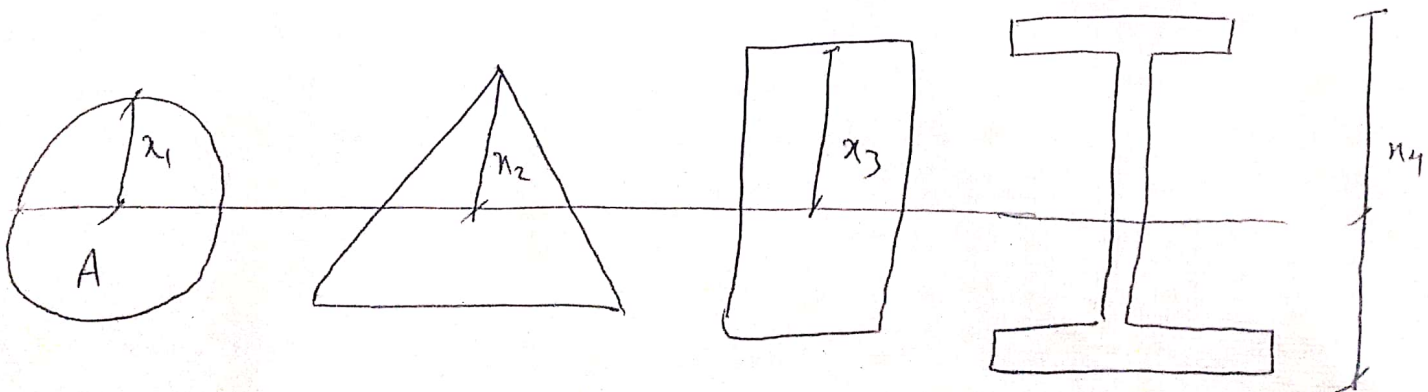
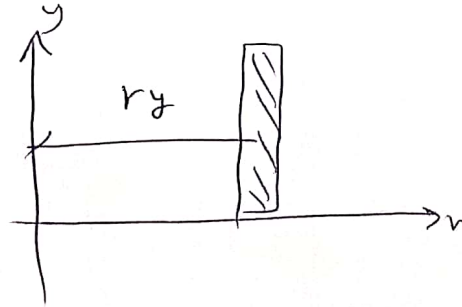
$\approx$



$$Ar_x^2 = I_x \rightarrow r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$Ar_y^2 = I_y \rightarrow r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$Ar_z^2 = J \rightarrow r_z = \sqrt{\frac{J}{A}}$$



مساحت سطح فوقی با یکدیگر برابر است.

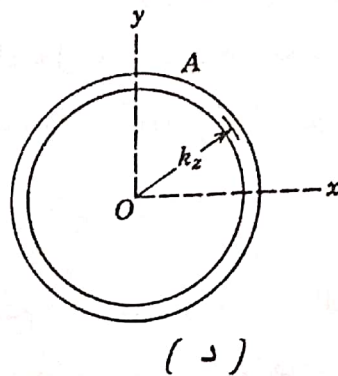
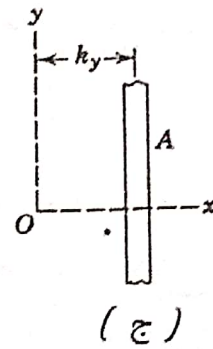
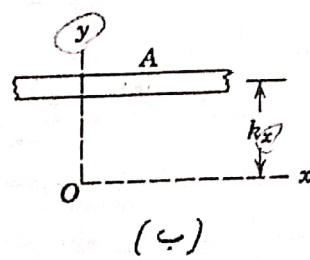
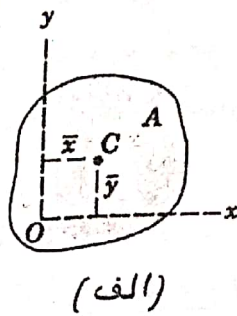
ج. درختن استگوال

(ب) شعاع زیراسیون . سطح A را در شکل $A-3$ الف در نظر بگیرید . این سطح حول محوره‌های عمود بر هم که در صفحه واقع شده‌اند گشتاورهای اینرسی I_x و I_y را دارد . و حول محوری که از O گذشته و عمود بر سطح می‌شود ، گشتاور اینرسی قطبی ، I_z برای آن تعریف می‌شود . فرض می‌کنیم که این سطح به صورت نواری باریک و افقی به فاصله k_x از محور x قرار گیرد . گشتاور اینرسی این نوار حول محور x ، $I_x = k_x^2 A$ چنانچه با گشتاور اینرسی سطح اول برابر باشد آنگاه می‌گوئیم که فاصله k_x شعاع زیراسیون می‌باشد . می‌توان همین صحبت را در مورد محور y و با فرض یک نوار قائم مطابق شکل $A-3$ ، ج نیز داشت . سرانجام اگر این سطح را به صورت یک حلقه باریک به شعاع k_z از O ، در نظر بگیریم (شکل $A-3$ د) گشتاور اینرسی قطبی را می‌توان به صورت $I_z = k_z^2 A$ نوشت . بطور خلاصه .

(A-4)

$I_x = k_x^2 A$	$k_x = \sqrt{I_x/A}$
$I_y = k_y^2 A$	$k_y = \sqrt{I_y/A}$
$I_z = k_z^2 A$	$k_z = \sqrt{I_z/A}$

بدین ترتیب می‌توان گفت که شعاع زیراسیون ، معیاری از نحوه پراکندگی سطح نسبت به محور مورد نظر می‌باشد .



شکل A - ۳

از جایگزین نمودن رابطه $A - ۴$ در رابطه $A - ۳$ ، بدست می آوریم

(A - ۵)

$$k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$$

به عبارتی مربع شعاع ژیراسیون قطبی برابر است با مجموع مربع شعاع ژیراسیون حول هر یک از دو محور عمود برهم. در اینجا باید دقت داشت که شعاع ژیراسیون با فاصله‌ای که موقعیت مرکز سطح، C را مشخص می‌کند اشتباه نشود. در شکل A - ۳، الف منظور از $\bar{r}^2$ مربع فاصله مرکز سطح تا محور افقی می‌باشد. به عبارتی مربع میانگین فاصله‌ها تا این محور. اما k_x^2 ، میانگین مربع فاصله‌ها می‌باشد. گشتاور اینرسی سطح با $A\bar{y}^2$ برابر نیست. زیرا مربع میانگین‌ها کمتر از میانگین مربع‌ها می‌باشد.

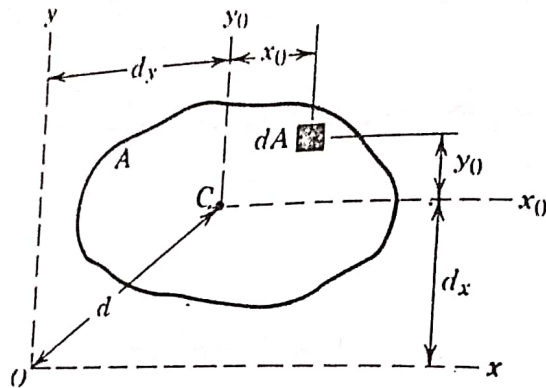
(ج) انتقال محورها. گشتاور اینرسی یک سطح حول محوری که از مرکز آن عبور می‌کند را به راحتی می‌توان برحسب گشتاور اینرسی حول محوری موازی که از مرکز سطح عبور می‌کند، بیان کرد. در شکل A - ۴، محورهای $x_0 - y_0$ از مرکز سطح C می‌گذرند. گشتاور اینرسی را می‌خواهیم حول محورهای موازی $x - y$ بدست آوریم. بنابه تعریف گشتاور اینرسی جز سطح

dA حول محور x برابر است با

$$dI_x = (y_0 + d_x)^2 dA$$

پس از بسط و انتگرال گیری

$$I_x = \int y_0^2 dA + 2d_x \int y_0 dA + d_x^2 \int dA$$



شکل ۴ - A

عبارت اول، گشتاور اینرسی حول محور x_0 می باشد یا $\bar{I}_x$. عبارت دوم صفر است زیرا، $\int y_0 dA = A\bar{y}_0$ از آنجا که مرکز سطح بر روی محور x_0 واقع می شود، صفر می گردد. عبارت سوم را می توان به صورت Ad_x^2 نوشت. بدین ترتیب رابطه I_x و I_y به شکل زیر خواهد بود.

$$I_x = \bar{I}_x + Ad_x^2$$

$$I_y = \bar{I}_y + Ad_y^2$$

(۶-ا)

از رابطه ۶-۳، می توان با جمع کردن این دو رابطه نتیجه گرفت

$$I_z = \bar{I}_z + Ad^2$$

(۶-الف)

در استفاده از این دو رابطه باید توجه داشت که در انتقال گشتاور اینرسی از یک محور به محور دیگر باید، این دو محور با هم موازی بوده و حتماً یکی از مرکز سطح بگذرد. به همین خاطر اگر بخواهیم گشتاور اینرسی را از یک محور به محور دیگر به موازات آن انتقال دهیم و این دو محور هیچکدام از مرکز سطح عبور نکنند. باید ابتدا گشتاور سطح را به محوری موازی که

از مرکز سطح می‌گذرد. منتقل کرد و سپس آن را به محور مورد نظر بود. بر
این نظریه در خصوص شعاع ژیراسیون، k نیز درست می‌باشد. در مورد انتقال شعاع
ژیراسیون می‌توان رابطه زیر را نوشت.

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2$$

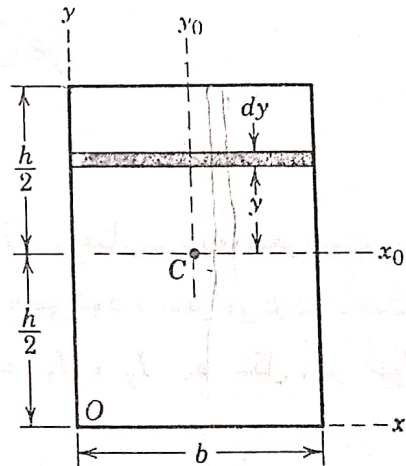
(A-۶ ب)

در این رابطه $\bar{k}$ شعاع ژیراسیون حول محوری است که از مرکز سطح عبور می‌کند. d فاصله این
محور است تا محوری که می‌خواهیم شعاع ژیراسیون را به آن منتقل کنیم. این دو محور با هم
موازی می‌باشند.

در جدول D-۳، روابط گشتاور اینرسی برای چند سطح در شکل‌های معمول داده شده
است.

تمرین نمونه A-۱

یک سطح مستطیلی مطابق شکل، تحت بررسی می‌باشد. گشتاور
اینرسی این سطح را حول محورهای x_0 و y_0 و گشتاور اینرسی
قطبی آن را حول محور z_0 که از x می‌گذرد تعیین نمایید.
در مرحله بعد نتایج بدست آمده را به ترتیب به محورهای
 y ، z منتقل کنید.



حل. برای تعیین گشتاور اینرسی حول محور x_0 ،
یعنی I_{x_0} ، یک نوار افقی در نظر می‌گیریم به عرض b و ضخامت
 dy . فاصله این نوار تا محور مورد نظر را با y_0 مشخص
می‌کنیم.

توجه: اگر با جزء سطح درجه
دوم $dA = dx dy$ کار می-
کردیم. ناچار بودیم که در دو
جهت انتگرال بگیریم.

$$[I_x = \int y^2 dA] \quad \bar{I}_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{1}{12} b h^3$$

به راحتی می‌توان دریافت که گشتاور اینرسی حول محور y_0
برابر خواهد بود با

$$\bar{I}_y = \frac{1}{12} h b^3$$

گشتاور اینرسی قطبی را می توان به صورت زیر تعیین کرد.

$$[J_z = I_x + I_y] \quad \bar{J}_z = \frac{1}{12}(bh^3 + hb^3) = \frac{1}{12}A(b^2 + h^2)$$

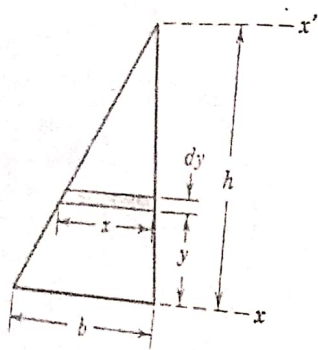
گشتاور اینرسی حول محور

$$[I_x = \bar{I}_x + Ad_x^2] \quad I_x = \frac{1}{12}bh^3 + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}bh^3 = \frac{1}{3}Ah^2$$

گشتاور اینرسی قطبی حول محور O ، با انتقال

$$[J_z = \bar{J}_z + Ad^2] \quad J_z = \frac{1}{12}A(b^2 + h^2) + A\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right]$$

$$J_z = \frac{1}{3}A(b^2 + h^2)$$



تمرین نمونه A-۲

گشتاور اینرسی سطح مثلثی نشان داده شده در شکل را حول محوری منطبق بر قاعده و نیز محورهایی که از مرکز سطح و راس مثلث به موازات آن می گذرند ، تعیین نمایید .

توجه: در اینجا باز ساده ترین جزء را در نظر گرفته ایم. اگر $dA = dx dy$ را فرض می کردیم

باید در دو جهت انتگرال می گرفتیم.

حل. یک جزء سطح را به صورت نوار در نظر می گیریم. سطح این جزء . $dA = x dy = [(h-y)b/h] dy$ می باشد.

بنابه تعریف

$$[I_x = \int y^2 dA] \quad I_x = \int_0^h y^2 \frac{h-y}{h} b dy = b \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4h} \right]_0^h = \frac{bh^3}{12}$$

می توان این گشتاور اینرسی را به محوری که از مرکز سطح می گذرد منتقل کرد .

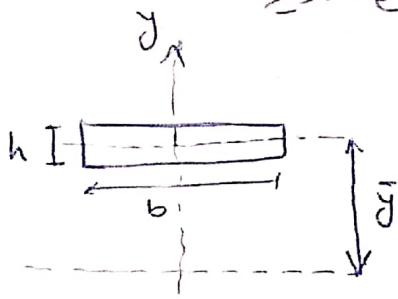
$$[\bar{I} = I - Ad^2] \quad I = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36}$$

حال این گشتاور را به محوری که از راس مثلث می گذرد منتقل می کنیم.

$$[I = \bar{I} + Ad^2] \quad I_x' = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{2h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{4}$$

از تشابه مثلث x را بر حسب y می نویسیم .

مثال: مکان اینرسی شکل زیر را حول محوره x بدست آورید.

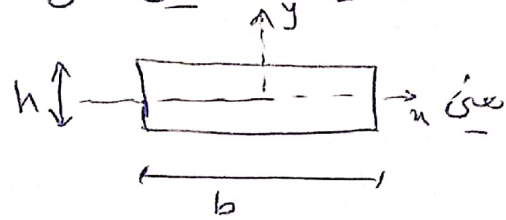


جهت بدست آوردن مکان اینرسی باید از فرمول زیر استفاده نمود:

$$I = \bar{I} + Ad^2$$

$\bar{I}$ مکان اینرسی متغیر حول مرکز سطح گذرنده از شکل است. (مرکز سطح خودی)

$$\bar{I} = \frac{bh^3}{12}$$

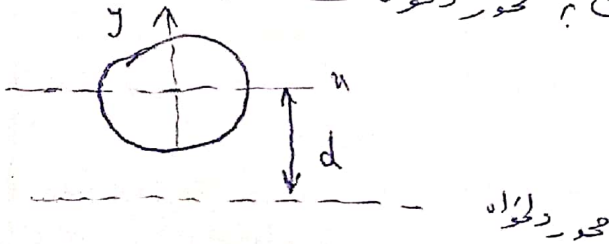


فاصله d عبارت است از فاصله بین مرکز سطح خودی متغیر نسبت به دستگاه گذرنده از خودی شکل تا محور دلخواه x که در شکل با y نشان داده است.

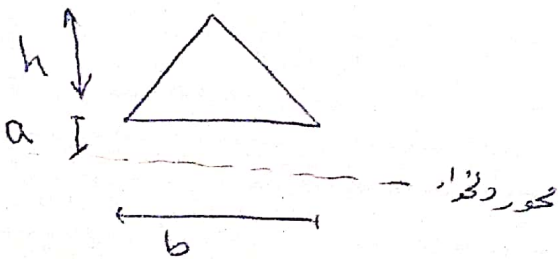
$$I = \frac{bh^3}{12} + Ad^2$$

پایه این جواب منتهی:

مثال دوم: مرکز سطح شکل زیر را نسبت به محور دلخواه x که داده شده است بدست آورید.



$$I = \frac{\pi R^4}{4} + (\pi R^2) \times d^2$$



$$I = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{bh}{2}\right) \times \left(a + \frac{h}{3}\right)^2$$

A. - ۳. سطح‌های مرکب

گاه لازم می شود که گشتاور اینرسی یک سطح تشکیل شده از چند قسمت با همدسته مختلف را بدست آوریم. از آنجا که گشتاور اینرسی حاصل ضرب سطح در مربع فاصله می باشد، می توان گفت که گشتاور اینرسی یک سطح مثبت، همواره مثبت است. بدین ترتیب گشتاور اینرسی یک سطح ترکیبی حول یک محور مشخص را می توان به راحتی از جمع زدن مقادیر مثبت و منفی گشتاورهای اینرسی جزء سطح های تشکیل دهنده آن حول این محور بدست آورد. چنانچه سطح از قسمت های مختلف و متعددی تشکیل شده باشد به منظور سهولت بیشتر باید مقادیر را در جدولی ذکر نمود. سطح هر قسمت را با A و گشتاور اینرسی آن حول محوری که از مرکز آن قسمت می گذرد با I نشان می دهیم. بدین ترتیب گشتاور اینرسی سطح ترکیبی حول یک محور دیگر به فاصله های d از مرکز هر قسمت قرار می گیرد را می توان با رابطه $I = \sum I + \sum Ad^2$ بدست آورد. برای مثال اگر در صفحه $x-y$ کار می کنیم می توان این مقادیر را به صورت جدول زیر ذکر نمود.

قسمت	سطح, A	d_x	d_y	Ad_x^2	Ad_y^2	$\bar{I}_x$	$\bar{I}_y$
جمع				ΣAd_x^2	ΣAd_y^2	$\Sigma \bar{I}_x$	$\Sigma \bar{I}_y$

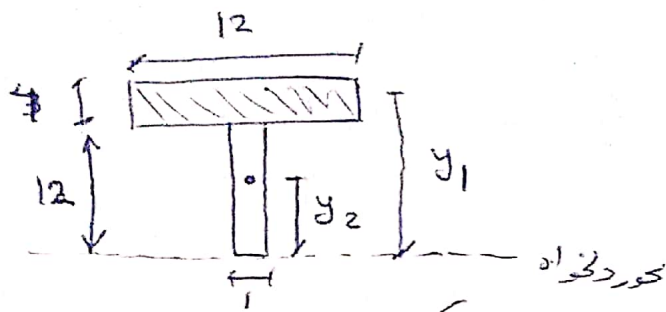
با توجه به نتایج بدست آمده از این جدول می‌توان گفت .

$$I_x = \Sigma \bar{I}_x + \Sigma Ad_x^2$$

$$I_y = \Sigma \bar{I}_y + \Sigma A d_y^2$$

هر چند که برای تعیین گشتاور اینرسی یک سطح ترکیبی می‌توان گشتاور اینرسی مربوط به قسمت‌های مختلف را با هم جمع نمود ولی برای تعیین شعاع ژیراسیون این سطح نمی‌توان بدین ترتیب عمل کرد. شعاع ژیراسیون سطح ترکیبی $k = \sqrt{I/A}$ می‌باشد که I گشتاور اینرسی و A مساحت کل سطح است. به طریق مشابه شعاع ژیراسیون قطبی k برابر می‌شود با $\sqrt{J/A}$ که $J = I_x + I_y$ در دستگاه مختصات $x-y$ می‌باشد.

مثال:



① فاصله مرکز سطح هر شکل را تا محور دلتخواه تعیین کنید.

$$d_2 = y_2 = \frac{12}{2} = 6 \quad d_1 = y_1 = 10 + \frac{4}{2} = 12$$

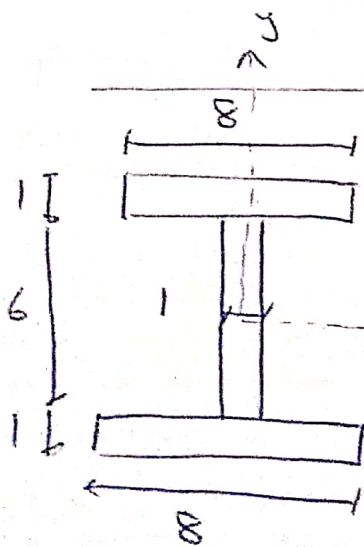
② مان اینرسی هر شکل را حول مرکز جاذبش تعیین کنید.

$$\bar{I}_1 = \frac{4^3 \times 12}{12} = 64$$

$$\bar{I}_2 = \frac{1 \times 12^3}{12} = 144$$

③ از فرمول زیر استفاده کنید:

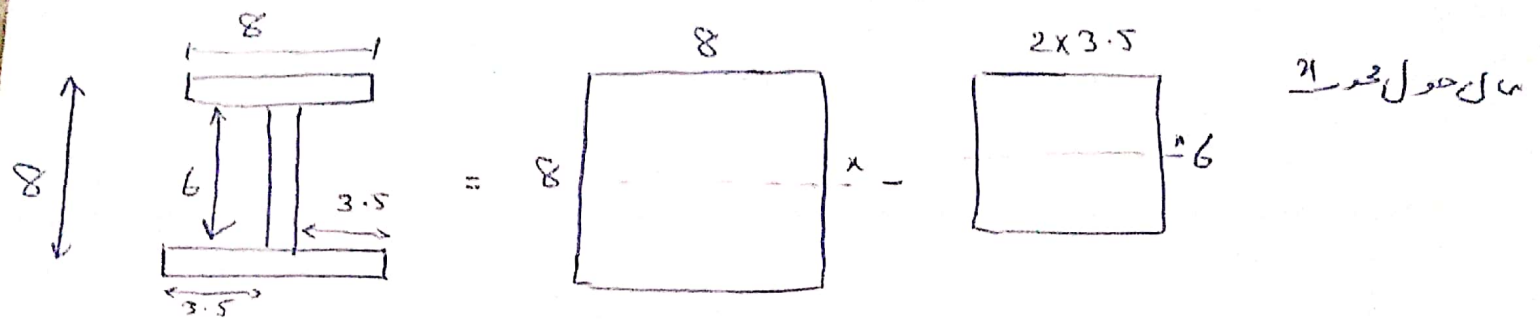
$$\begin{aligned} I &= \sum (\bar{I}_n + A_n d_n^2) = (I_1 + A_1 d_1^2) + (I_2 + A_2 d_2^2) \\ &= \left(\frac{4^3 \times 12}{12} + 4 \times 12^2 \right) + (144 + 12 \times 6^2) \\ &= (4^3 + 48 \times 144) + (144 + 12 \times 36) \end{aligned}$$



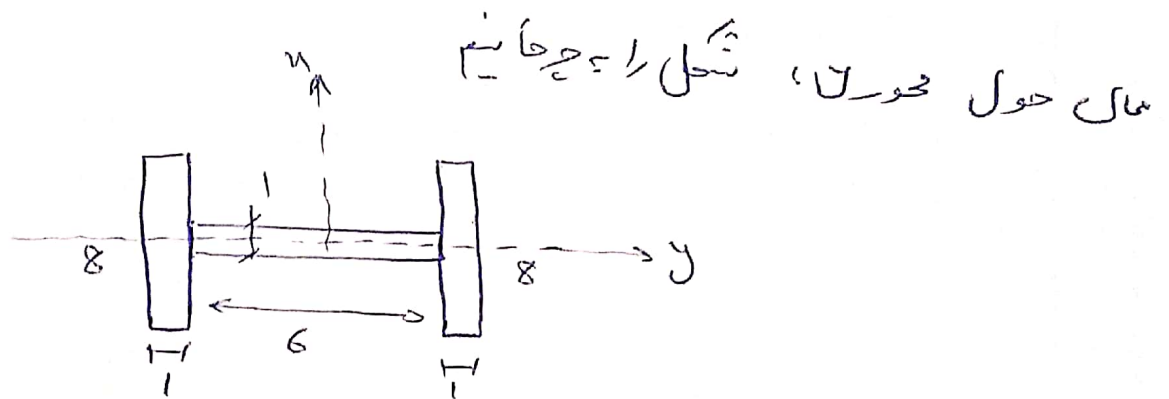
مان اینرسی شکل ریب زیر را حول مرکز جاذبش بدست آورید.

① چون شکل متقارن است مرکز جاذب آن بر محورهای تقارن قرار دارد.

② می توان حسب تعیین مان اینرسی هر یک از اجزای آن را بدست آورد.



$$I_x = I_{x_{\text{مستطیل بیرونی}}} - I_{x_{\text{مستطیل داخلی}}} = \frac{8 \times 8^3}{12} - \frac{7 \times 6^3}{12}$$

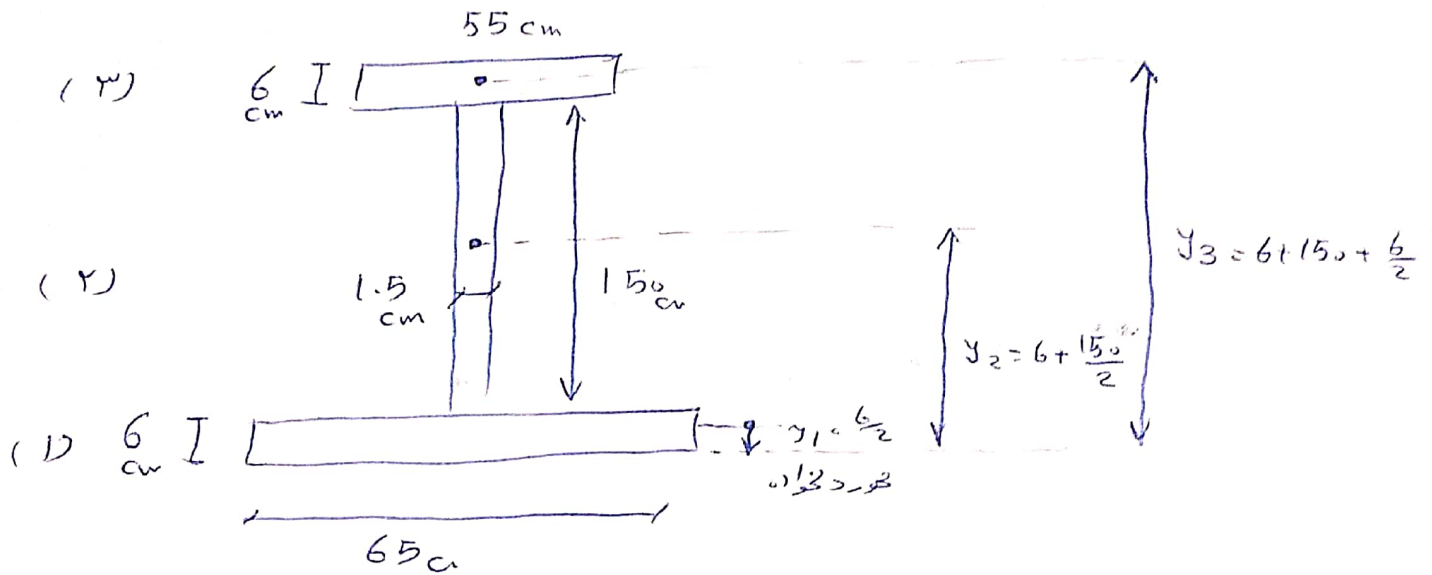


شکل تبدیل: مستطیل است

$$I_y = I_{y_1} + I_{y_2} + I_{y_3}$$

$$= \frac{1 \times 8^3}{12} + \frac{1 \times 6^3}{12} + \frac{1 \times 8^3}{12}$$

مطلوبه: است محاسبه مرکز سطح دهان انبرضا مقطع زیر:



$$\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{A}$$

ابتدای محو: دلتوا انتحاب می کنیم

مثلاً محو: لا دریا پس.

شکل را به سه قسمت تقسیم می کنیم. فاصله مرکز سطح مستطیل

را تا محو: یایی حساب می کنیم.

برای شکل (۱) حول محاسبات ۶ است و مرکز آن در وسط است

$$\bar{y}_1 = 3 \text{ cm}$$

برای شکل (۲) وسط مستطیل قائم برابر ۷۵ می فاصله وسط آن

$$y_2 = 6 + 75 = 81$$

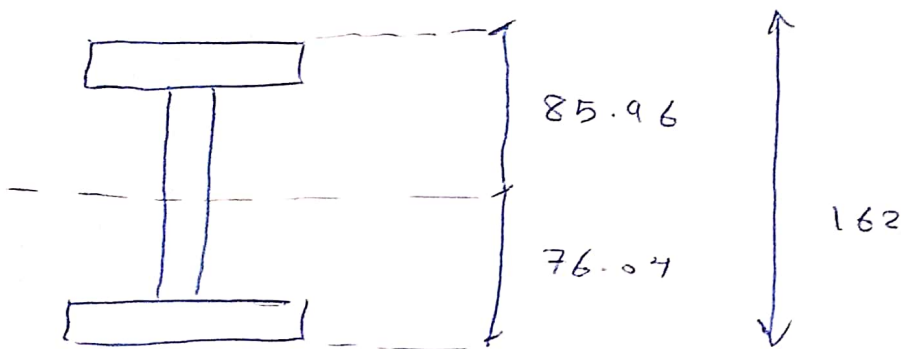
برای شکل (۳) فاصله وسط مستطیل افقی برابر به برابر می است: لا پس +

ارتفاع مستطیل قائم + نصف می است

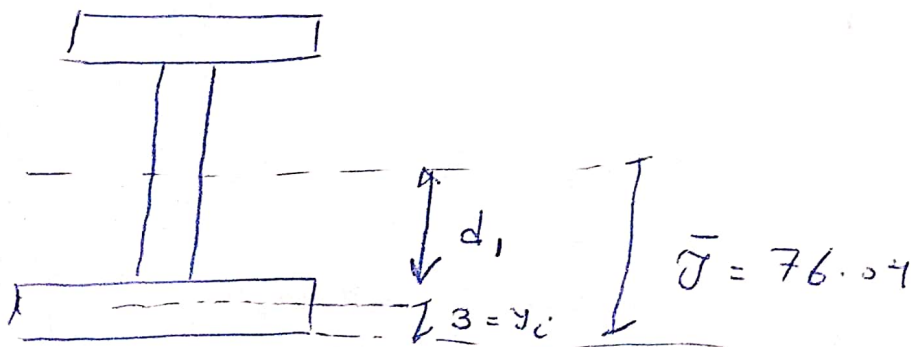
$$y_3 = 6 + 150 + \frac{6}{2} \rightarrow \text{ارتفاع کل} \quad \text{وسط ل}$$

	y_c	A	$y_c A$
(1)	3	6×65	1170
(2)	81	1.5×150	18225
(3)	159	6×55	52470
		$\Sigma A = 945$	$\Sigma y_c A = 1170 + 18225 + 52470 = 71865$

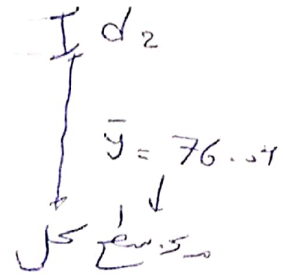
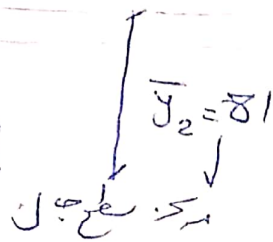
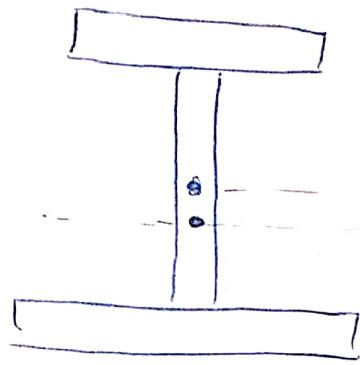
$$\bar{y} = \frac{\Sigma y_c A}{\Sigma A} = 76.04$$



$I = \Sigma (I + A d^2)$ ی سب مان انیری
↓
 مان انیری حرکت حول محور لایزیده از مرکز سطح ↓
 خودش d: فاصله مرکز سطح خودش
تا محور کل

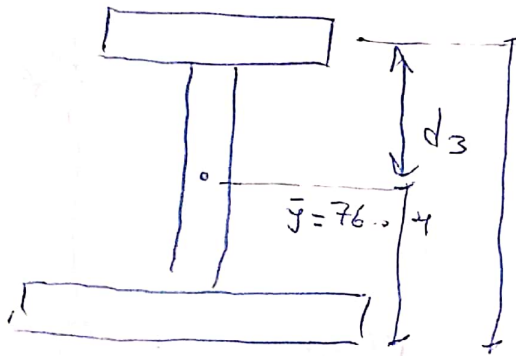


مثلا d برای بال یا سنی $d = \bar{y} - y_1 = 73.04$
↓
 مرکز سطح کل ↓
 مرکز سطح بال یا سنی



$$d_2 = \bar{y} - \bar{y}_2 = 76.04 - 81 = -4.96$$

یعنی مرکز سطح جان حدود 4.96 بالاتر از مرکز سطح کل است.



$$\bar{y}_3 = 159$$

$$d_3 = \bar{y} - \bar{y}_3 = 76.04 - 159 = -82.96$$

یعنی مرکز سطح بالایی حدود 82.96 بالاتر از مرکز سطح کل است.

$$I = \sum (I + Ad^2)$$

$$= \frac{65 \times 6^3}{12} + 6 \times 65 \times (76.04 - 3)^2$$

$$+ \frac{1.5 \times 150^3}{12} + 1.5 \times 150 \times (81 - 76.04)^2$$

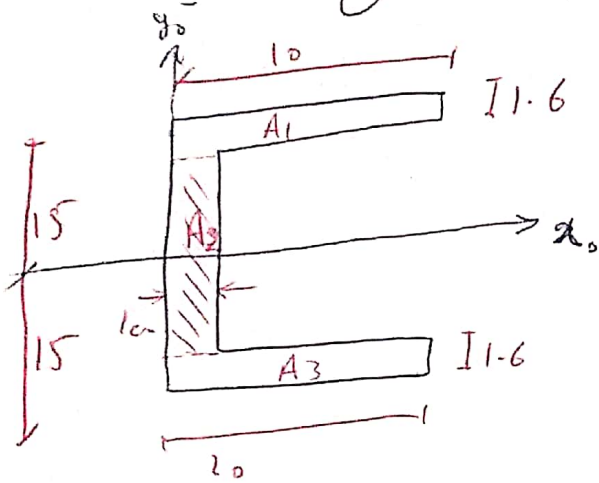
$$+ \frac{55 \times 6^3}{12} + 55 \times 6 \times (76.04 - 159)^2 =$$

$$= 2.0818 \times 10^6 + 0.4275 \times 10^6 + 2.2722 \times 10^6$$

$$= 4.781 \times 10^6 \text{ cm}^4$$

مسئله ششم از کتاب هندسه هندسی مهندسی

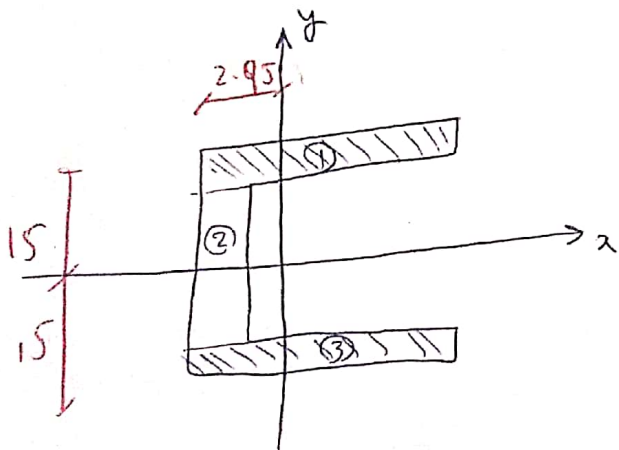
محاسبه مرکز جرم و عکس‌المرآتی و عکس‌المرآتی و عکس‌المرآتی



	A	$\bar{x}$	$A\bar{x}$
①	16	5	80
②	$(30-3 \cdot 2) \times 1$	0.5	13.4
③	16	5	80
Σ	58.8	-	173.4

$$\bar{x} = \frac{173.4}{58.8} = 2.95 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = 2.7$$



$$I_{x_1} = I_x + d^2 A = \frac{10 \times 1.6^3}{12} + (0.8 + 13.4)^2 \times 10 \times 1.6$$

$$= \frac{10 \times 1.6^3}{12} + 14.2^2 \times 16$$

$$= 3.413 + 3226.24 = 3229.653 = I_{x_3}$$

$$I_{x_2} = \frac{(30-3 \cdot 2)^3 \times 1}{12} = 1604.1$$

$$I_x = 2 \times 3229.7 + 1604.1 = 8063.5$$

$$I_y = 8030$$

$$I_{y_1} = I_y + d^2 A$$

$$= \frac{10^3 \times 1.6}{12} + (5 - 2.95)^2 \times 16$$

$$I_{y_3} = I_{y_1} = 133.33 + 67.24 = 200.6$$

$$I_{y_2} = \frac{1^3 \times 26.8}{12} + 26.8 \times (2.95 - 0.5)^2$$

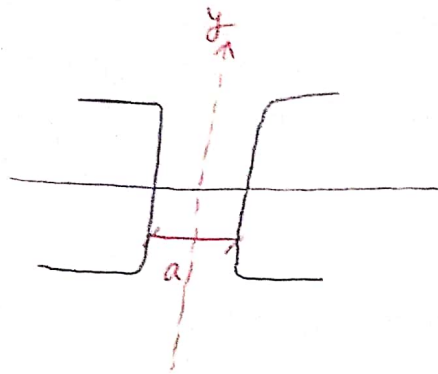
$$= 2.23 + 160.9 = 163.14$$

$$I_y = 2 \times 200.6 + 163.14$$

$$I_y = 564.34$$

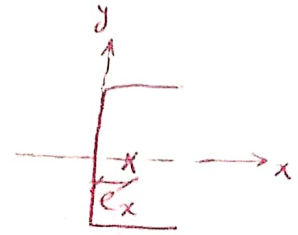
$$I_{\bar{y}} = 495$$

مثال: شعاع یک پروفیل از فولاد دارد 300 میلی است. مقدار کامله a را بدین ترتیب
آزمایید که محال اینرسی حول دو محور مشخص شده برابر باشد.



$I_x = 8030$
 $I_y = 495$
 $A = 58.8$
 $e_x = 2.7$

ب. ن. خ.
م. ن. ا. د. 300



حل: $I_n = 2 I_{x_{\text{م. ن. ا. د.}}} = 2 \times 8030 = 16060$

$$I_y = 2 \left[I_{y_{\text{م. ن. ا. د.}}} + A \times \left(\frac{a}{2} + e_x \right)^2 \right]$$

$$= 2 \left[495 + 58.8 \left(\frac{a}{2} + 2.7 \right)^2 \right]$$

$$I_n = I_y$$

$$16060 = 990 + 117.6 \left(\frac{a}{2} + 2.7 \right)^2$$

$$128.15 = \left(\frac{a}{2} + 2.7 \right)^2$$

$$11.32 = \frac{a}{2} + 2.7 \rightarrow \begin{cases} a = 17.24 \\ a_{\text{دقیق}} = 17.41 \end{cases}$$